प्रश्नावली 10.1

1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

हल: - एक वृत्त की अपरिमित रूप से अनेक स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति करें:

(i) एक वृत्त की स्पर्श रेखा इसे .... बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

हल: - एक

(ii) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को .... कहते हैं।

हल: - छेदक रेखा

(iii) एक वृत्त की .... समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

हल: - दो

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा का उभयनिष्ठ बिंदु को .... कहलाता है।

हल: - स्पर्श बिंदु

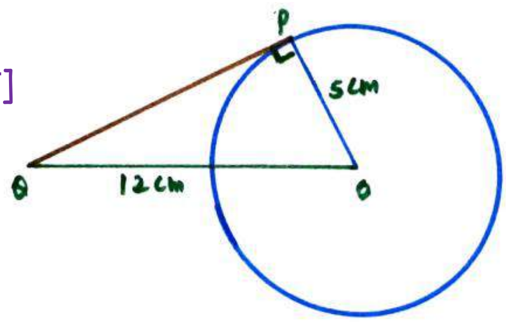
3. 5 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ, केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 cm। PQ की लंबाई है:

(A) 12 cm (B) 13 cm (C) 8.5 cm (D) $\sqrt{119}$ cm

हल: - वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखा तक खींची गई रेखा स्पर्श रेखा के लंबवत होती है।

$\therefore OP \perp PQ$

समकोण Δ OPQ में,



$OP^2 + PQ^2 = OQ^2$ [पाइथागोरस प्रमेय द्वारा]

$\Rightarrow 5^2 + PQ^2 = (12)^2$

$\Rightarrow PQ^2 = 144 - 25$

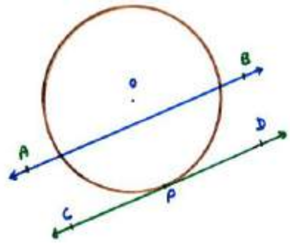
$\Rightarrow PQ^2 = 119$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{119}$ cm

$\therefore$ सही विकल्प (D) है।

4. एक दी गई रेखा के समांतर एक वृत्त और दो रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि एक वृत्त की स्पर्श रेखा हो और दूसरी वृत्त की छेदक रेखा हो।

हल: - AB और CD दो समानांतर रेखाएँ हैं जहाँ CD वृत्त की स्पर्श रेखा है बिंदु C पर जबकि AB वृत्त की छेदक रेखा है।



प्रश्नावली 10.2

प्रश्न 1 से 3 में, सही विकल्प चुनें और उचित कारण दीजिए।

1. एक बिंदु Q से, एक वृत्त की स्पर्श रेखा की लंबाई 24 cm है तथा Q की केंद्र से दूरी 25 cm है। वृत्त की त्रिज्या है:

(a) 7 cm (b) 12 cm

(c) 15 cm (d) 24.5 cm

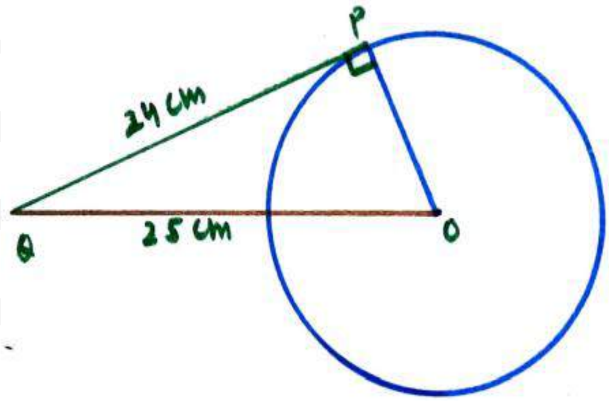
हल: - यहाँ पर PQ, P पर एक स्पर्श रेखा है

∴ $OP \perp PQ$

∴ समकोण ΔPOQ,

$OP^2 + PQ^2 = OQ^2$

[पाइथागोरस प्रमेय द्वारा]



$\Rightarrow OP^2 + 24^2 = 25^2$

$\Rightarrow OP^2 + 576 = 625$

$\Rightarrow OP^2 = 625 - 576$

$\Rightarrow OP^2 = 49$

$\Rightarrow OP = 7$ cm

∴ वृत्त की त्रिज्या 7 cm है।

∴ सही विकल्प (a) है।

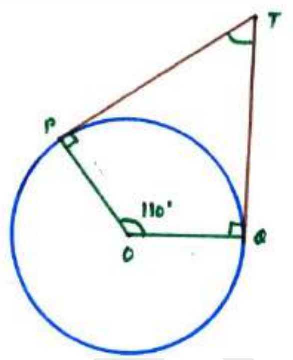
2. आकृति में यदि TP और TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ बराबर है

(A) 60° (B) 70° (C) 80° (D) 90°

हल: - OP और OQ वृत्त की त्रिज्याएँ हैं

TP और TQ स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore \angle OPT = \angle OQT = 90°$ प्रत्येक



चतुर्भुज POQT में,

$\angle PTQ + \angle OPT + \angle POQ + \angle OQT = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ + 90° + 110° + 90° = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ = 360° - 290°$

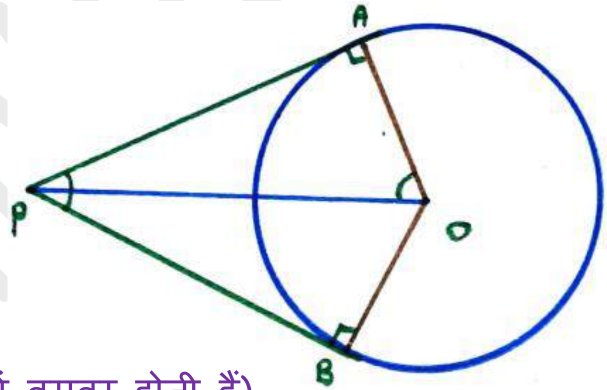
$\Rightarrow \angle PTQ = 70°$

$\therefore$ सही विकल्प (B) है।

3. यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA और PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो ∠ POA बराबर है

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

हल: - चूँकि OA और OB क्रमशः PA और PB स्पर्श रेखाओं की वृत्त की त्रिज्याएँ हैं। $\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90°$ प्रत्येक



चतुर्भुज AOBP में,

$\angle AOB + \angle PAO + \angle PBO + \angle APB = 360°$

$\Rightarrow \angle AOB + 90° + 90° + 80° = 360°$

$\Rightarrow \angle AOB = 360° - 260°$

$\Rightarrow \angle AOB = 100°$

अब Δ POA और Δ POB में,

PA = PB (बाहरी बिंदु से स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं)

OA = OB (त्रिज्याएँ)

OP = OP (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta POA \cong \Delta POB$ (SSS सर्वान्गसमता द्वारा)

$\therefore \angle POA = \angle POB$ (c.p.c.t.)

$\angle AOB = \angle POA + \angle POB$

$\angle AOB = \angle POA + \angle POA$ ($\because \angle POA = \angle POB$)

$\Rightarrow \angle AOB = 2\angle POA$

$\Rightarrow \angle POA = \frac{1}{2}\angle AOB$

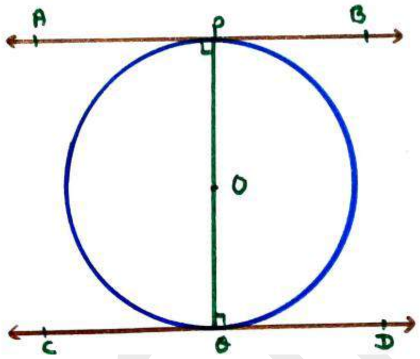
$\Rightarrow \angle POA = \frac{1}{2}100°$

$\Rightarrow \angle POA = 50°$

$\therefore$ सही विकल्प (A) है।

4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

हल: - माना AB और CD वृत्त के व्यास PQ के सिरे पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं



$\therefore OP \perp AB$ और $OQ \perp CD$

{$\because$ A और B स्पर्श बिंदु है}

$\therefore \angle APQ = \angle DQO = 90°$

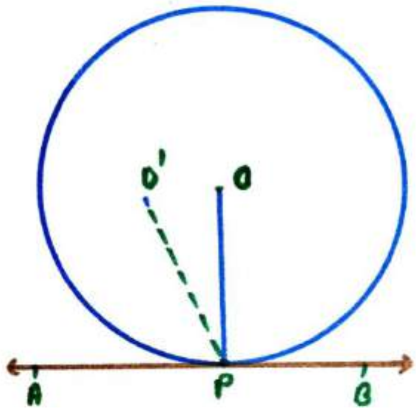
लेकिन ये आंतरिक एकांतर कोण है

इसलिए AB और CD समांतर रेखाएं है

$\therefore$ किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

5. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खिंचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

हल: - मान लीजिए AB बिंदु P पर केंद्र O के साथ वृत्त की स्पर्श रेखा है।



मान लीजिए कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा के संपर्क बिंदु पर लंबवत केंद्र से नहीं गुजरता है।

माना यह O' से गुजरता है।

$\Rightarrow \angle O'PA = 90°$

और $\angle OPA = 90°$ (त्रिज्या स्पर्श रेखा के संपर्क बिंदु पर लंबवत है)

$\Rightarrow \angle O'PA = \angle OPA = 90°$

यह तभी संभव है जब O और O 'संयोग' हों जो एक विरोधाभास है।

$\therefore$ हमारा अनुमान गलत है।

अतः वृत्त की स्पर्श रेखा के संपर्क बिंदु पर लंबवत केंद्र से होकर गुजरता है। इति सिद्हम।

6. एक बिंदु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5 cm की दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

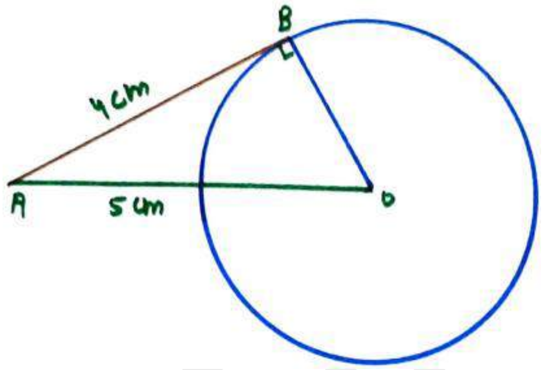
हल: - इस वृत्त पर बिन्दु A से खींची गई स्पर्श रेखा AB है जिसकी लम्बाई 4 cm है।

$\therefore OB \perp AB$

$OA = 5cm$ और $AB = 4$ cm (दिया है)

समकोण ΔABO में,

$AB^2 + BO^2 = OA^2$ [पाइथागोरस प्रमेय द्वारा]



$\Rightarrow 4^2 + BO^2 = 5^2$

$\Rightarrow 16 + BO^2 = 25$

$\Rightarrow BO^2 = 25 - 16$

$\Rightarrow BO^2 = 9$

$\Rightarrow BO = 3$

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या 3 cm है। Ans.

7. दो संकेंद्रित वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm और 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है।

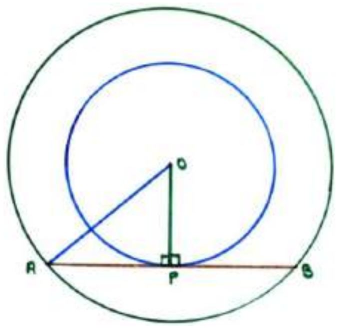
हल: - माना AB बड़े वृत्त की जीवा है जो छोटे वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श करती है।

$\therefore$ AB छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है।

$\Rightarrow OP \perp AB$

$\therefore$ समकोण ΔAOP में,

$AP^2 + OP^2 = OA^2$



$\Rightarrow AP^2 + 3^2 = 5^2$

$\Rightarrow AP^2 + 9 = 25$

$\Rightarrow AP^2 = 25 - 9$

$\Rightarrow AP^2 = 16$

$\Rightarrow AP = 4$

चूँकि $OP \perp AB$,

$\Rightarrow AP = BP$ ($\because$ केंद्र से जीवा पर खिंचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है)

$\Rightarrow AB = 2AP$

$= 2 \times 4 = 8$ cm

$\therefore$ बड़े वृत्त की जीवा की लम्बाई 8 cm है। Ans.

8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है। सिद्ध करें कि $AB + CD = AD + BC$

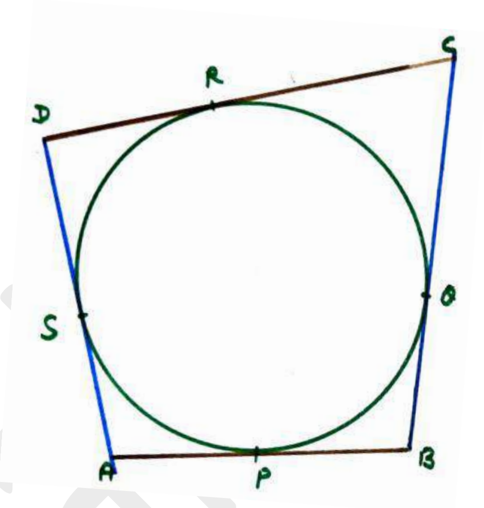
हल: - चूँकि AP और AS, A से स्पर्श रेखाएँ हैं

$\Rightarrow$ AP = AS ($\because$ बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं)

इसी प्रकार BP = BQ (...do....)

CQ = CR (...do....)

और DR = DS (...do....)



L. H. S. = AB + CD

= AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS

= AS + DS + BQ + CQ

= AD + BC

= R. H. S.

$\therefore$ AB + CD = AD + BC सिद्धम।

9. आकृति 10.13 में, XY और X'Y' O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समानांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A पर और X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$.

हल: - O और C को मिलाए

Δ AOP और Δ AOC में,

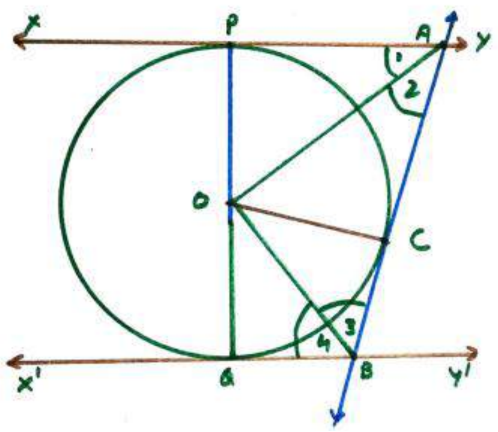
OP = OC (त्रिज्याएँ)

AP = AC ($\because$ बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ)

AO = AO (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta AOC$ (SSS सर्वांगसमता)

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (c.p.c.t.) ... (i)



इसी तरह Δ BOQ और Δ BOC में,

OQ = OC (त्रिज्याएँ)

BQ = BC ($\because$ बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ)

BO = BO (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta BOQ \cong \Delta BOC$ (SSS सर्वांगसमता)

$\Rightarrow \angle 4 = \angle 3$ (c.p.c.t.) ... (ii)

अब , $\angle PAB + \angle QBA = 180°$ (तिर्यक रेखा AB के समान पार्श्व कोण)

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180°$ ($\because \angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$)

$\Rightarrow 2\angle 2 + 2\angle 3 = 180°$

$\Rightarrow 2(\angle 2 + \angle 3) = 180°$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90°$

Δ AOB में, $\angle 2 + \angle 3 + \angle AOB = 180°$

$\Rightarrow 90° + \angle AOB = 180°$

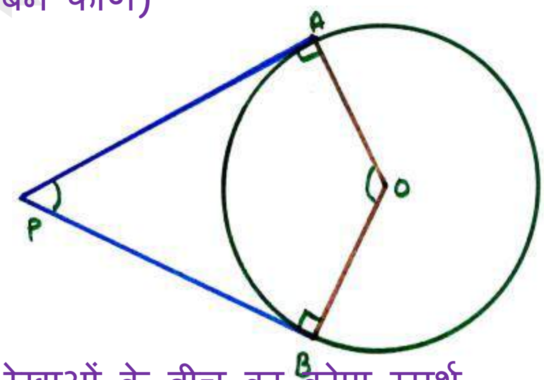
$\Rightarrow \angle AOB = 180° - 90°$

$\therefore \angle AOB = 90°$ सिद्धम। Ans.

10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

हल: - चूँकि PA और PB बाहरी बिंदु P से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ हैं

$\therefore \angle OAP = 90°$ और $\angle OBP = 90°$ (स्पर्श बिंदु पर बने कोण)



चतुर्भुज OAPB में,

$\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle BOA = 360°$

$\Rightarrow 90° + \angle APB + 90° + \angle BOA = 360°$

$\Rightarrow 180° + \angle APB + \angle BOA = 360°$

$\Rightarrow \angle APB + \angle BOA = 360° - 180°$

$\Rightarrow \angle APB + \angle BOA = 180°$

$\therefore$ किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है। सिद्धम।

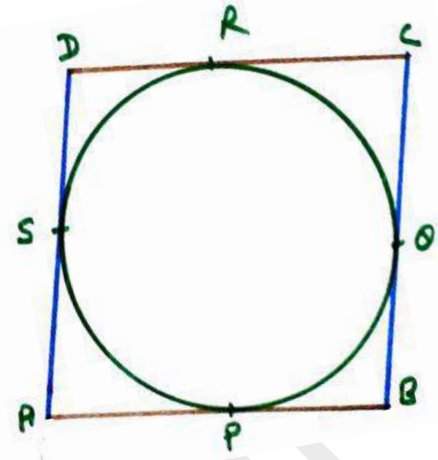
11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज होता है।

हल: - समांतर चतुर्भुज ABCD में

AB = CD और BC = AD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ) ....(i)

चूँकि AP और AS, A से स्पर्श रेखाएँ हैं

$\Rightarrow$ AP = AS (बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं)



इसी प्रकार, BP = BQ (...do....)

CQ = CR (...do....)

और DR = DS (...do....)

Now, AB + CD

= AP + BP + CR + DR

= AS + BQ + CQ + DS

= AS + DS + BQ + CQ

= AD + BC

⇒ AB + CD = AD + BC

⇒ AB + AB = BC + BC (∵ AB = CD और BC = AD)

⇒ 2AB = 2BC

⇒ AB = BC .... (ii)

समीकरण (i) और (ii)

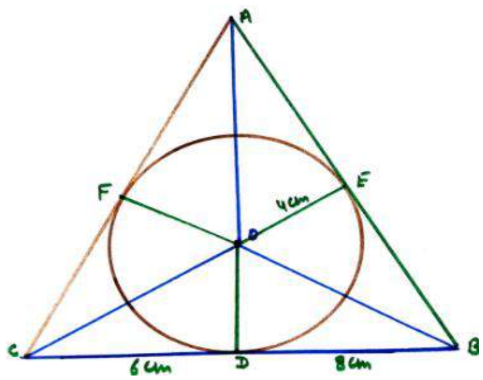
⇒ AB = BC = CD = DA

ABCD is a rhombus.

∴ एक वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है। सिद्धम।

12. 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखण्ड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिंदु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाईयां क्रमशः 8 cm और 6 cm है। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।

हल: - हम जानते है कि बाह्य बिंदु से खिंची गई स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं



∴ त्रिभुज ABC में, CF = CD = 6cm,

BE = BD = 8cm

और AE = AF = x (मान लिया गया है)

∴ AB = AE + EB = x + 8

BC = BD + DC = 8 + 6 = 14

और CA = CF + FA = 6 + x

त्रिभुज की अर्ध परिधि (s)

$= \frac{AB + BC + CA}{2}$

$= \frac{x + 8 + 14 + 6 + x}{2}$

$= \frac{2x + 28}{2}$

= x + 14

∴ ΔABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

= $\sqrt{(x+14)(x+14-x-8)(x+14-14)(x+14-x-6)}$

= $\sqrt{(x+14)(6)(x)(8)}$

= $\sqrt{48x(x+14)}$................................ ... (i)

साथ ही, ΔABC का क्षेत्रफल

= Δ AOB का क्षेत्रफल + Δ BOC का क्षेत्रफल + Δ COA का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2} \times AB \times OE + \frac{1}{2} \times BC \times OD + \frac{1}{2} \times CA \times OF$

= $\frac{1}{2} \times (x+8) \times 4 + \frac{1}{2} \times 14 \times 4 + \frac{1}{2} \times (x+6) \times 4$

= 2x + 16 + 28 + 2x + 12

= 4x + 56

= 4(x + 14) .... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से

$\sqrt{48x(x+14)}$ = 4(x + 14)

दोनों तरफ वर्ग करने पर

⇒ 48x (x + 14 = 16 (x + 14)^2

⇒ 48x = 16 (14 + x)

⇒ 3 x = 14 + x

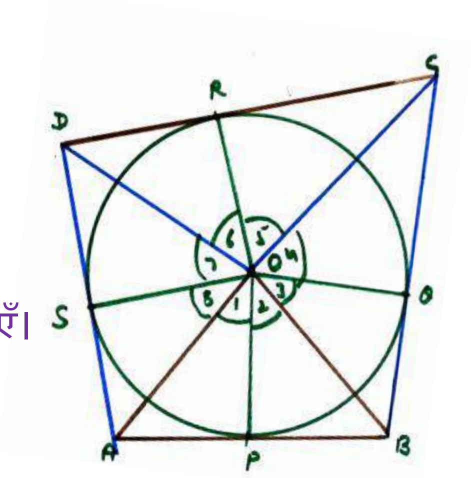
⇒ 2x = 14

∴ x = 7 cm

इसलिए, AB = x + 8 = 7 + 8 = 15 cm

CA = 6 + x = 6 + 7 = 13 cm Ans.

13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ वृत्त के केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।



हल: - मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है जो केंद्र O वाले एक वृत्त के परिगत इस प्रकार है कि यह वृत्त को बिंदु P, Q, R, S पर स्पर्श करती है।

चतुर्भुज ABCD के शीर्षों को वृत्त के केंद्र से मिलाएँ।

ΔAOP और ΔAOS में,

In ΔAOP और ΔAOS में,

AP = AS (बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं)

OP = OS (त्रिज्याएँ)

OA = OA (उभयनिष्ठ)

$\Delta AOP \cong \Delta AOS$ (SSS सर्वांगसमता)

$\therefore \angle POA = \angle AOS$ (c.p.c.t.)

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 8$

इसी प्रकार, $\Delta BOP \cong \Delta BOQ$ और $\angle 2 = \angle 3$ (c.p.c.t.)

$\Delta COQ \cong \Delta COR$ और $\angle 4 = \angle 5$ (c.p.c.t.)

$\Delta DOR \cong \Delta DOS$ और $\angle 6 = \angle 7$ (c.p.c.t.)

इन सभी कोणों को जोड़ने पर,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 8) + (\angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5) + (\angle 6 + \angle 7) = 360°$

$\Rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 360°$

$\Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 2) + 2(\angle 5 + \angle 6) = 360°$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = 180°$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180°$....................(i)

अब, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360°$

$\angle AOB + \angle COD + \angle BOC + \angle DOA = 360°$

$180° + \angle BOC + \angle DOA = 360°$ समीकरण (i) से

$\angle BOC + \angle DOA = 360° - 180°$

$\angle BOC + \angle DOA = 180°$

$\therefore$ एक वृत्त के परिगत चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ वृत्त के केंद्र पर संपूरक कोण बनाती हैं। सिद्धम।